

$f: V \rightarrow W$ applicazione lineare

$$B_V = \text{base di } V \Rightarrow B_V = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$f(B_V) = (f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n))$ insieme di
generatori di $\text{Im } f$.

La funzione f è unicamente determinata
dai valori di $f(\bar{e}_1) \dots f(\bar{e}_n)$.

$$\forall \bar{v} \in V: f(\bar{v}) = f(a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n) = a_1 \underline{f(\bar{e}_1)} + \dots + a_n \underline{f(\bar{e}_n)}$$

$$\bar{v} = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n$$

$$f(\bar{e}_1) = \bar{w}_1 = a_{11} \bar{e}_1 + a_{21} \bar{e}_2 + \dots + a_{m1} \bar{e}_m$$

$$f(\bar{e}_2) = \bar{w}_2 = a_{12} \bar{e}_1 + a_{22} \bar{e}_2 + \dots + a_{m2} \bar{e}_m$$

$$B_W = (\bar{e}_1' \dots \bar{e}_m')$$

base di W

$$f(\bar{e}_n) = \bar{w}_n = a_{1n} \bar{e}_1' + a_{2n} \bar{e}_2' + \dots + a_{mn} \bar{e}_m'$$

f date β_1, β_n e i valori

è univocamente determinata.

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

componenti:
di $f(\bar{e}_1)$

componenti:
di $f(\bar{e}_1)$

componenti:
di $f(\bar{e}_n)$

rispetto alla base β_n

$$A = [c_1 c_2 \dots c_n]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$AX = [c_1 \dots c_n]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n =$$

$$= x_1 f(\bar{e}_1) + \dots + x_n f(\bar{e}_n) =$$

in componenti:

$$= f(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) \text{ in componenti.}$$

Def: Sia $f: V \rightarrow W$ lineare, B_v, B_w basi di V e W

$$\dim V = n, \dim W = m.$$

Si dice matrice della funzione lineare f rispetto B_v e B_w

la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

tale che le i-esime oggetti colonne di A rappresentano le componenti dell'immagine dell'i-esimo vettore di B_v rispetto B_w .

oss $\Rightarrow$ Posto $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ le componenti dell'immagine di f rispetto f di

$x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ rispetto la base B_w sono
 date da AX prodotto righe per colonne.

oss: Sia V, W, U tre spazi vettoriali

$$\dim V = n \quad \dim W = m \quad \dim U = k.$$

B_v base di V B_w base di W B_u base di U .

$$f: V \rightarrow W \quad e \quad g: W \rightarrow U.$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$A_f \in \mathbb{K}^{m,n} \qquad \qquad \qquad A_g \in \mathbb{K}^{k,m}$$

qual è la matrice di $g \circ f$? rispetto B_v e B_u

$$\bar{e} \quad A_g \cdot A_f$$

$$y = A_f X \rightarrow \text{non componenti immaginarie di } \bar{e}_1 x_1 + \dots + \bar{e}_n x_n$$

rispetto $\mathcal{B}_w$

$$A_g Y \rightarrow \text{componenti immaginarie di } A_f X$$

rispetto $\mathcal{B}_u$

$$(A_g A_f) X = A_g Y$$

$$A_g \in \mathbb{K}^{k_m} \cdot A_f \in \mathbb{K}^{m_n} \Rightarrow \underbrace{A_g A_f}_{k_m} = \mathbb{K}^{k_m}$$

CONSIDERAZIONE: Il prod. di matrici è associativo!!

Combinando le basi.

Come combinare le componenti dei vettori /
e matrici delle applicazioni lineari al cambiare
della basi?

Sia V uno spazio vettoriale

$$B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$$

$$B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$$

due basi

$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix} \quad E' = \begin{bmatrix} \bar{e}'_1 \\ \vdots \\ \bar{e}'_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = {}^T E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = {}^T E' \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{v} = {}^T E X = {}^T E' X'}$$

$$[\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \bar{e}_1 x_1 + \dots + \bar{e}_n x_n$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

(*)

$$\begin{aligned}\bar{e}_1' &= a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n \\ \bar{e}_2' &= a_{21}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \dots + a_{2n}\bar{e}_n \\ &\vdots \\ \bar{e}_n' &= a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n\end{aligned}$$

$$E = \begin{bmatrix} \bar{e}_1' \\ \vdots \\ \bar{e}_n' \end{bmatrix} \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$${}^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E' = {}^T A E}$$

$${}^T E X = {}^T E' X'$$

$${}^T E X = ({}^T A E) X'$$

$${}^T E X = {}^T E A X'$$

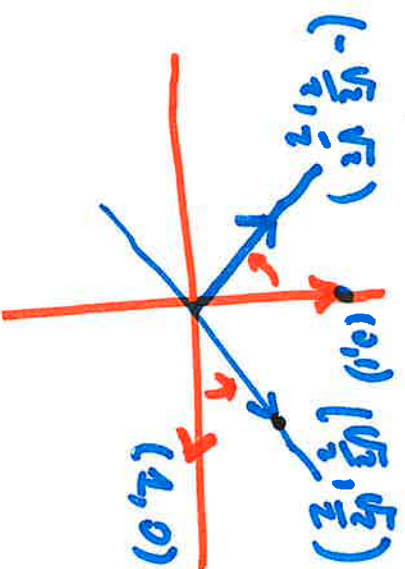
Le componenti
di V rispetto
a B sono

$A X'$ cioè

Le comp. rispetto
a B'

$$[X = AX']$$

ove la matrice A ha per colonne le componenti dei vettori di B' rispetto a B .
 $A =$ matrice di cambiamento di base.

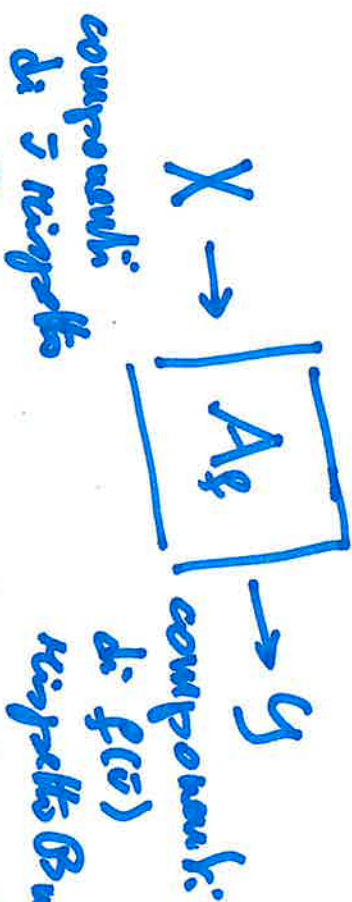


CAMBIO DI COORDINATE E APPLICAZIONI LINEARI.

f applicazione lineare $f: V \rightarrow W$

B_V base di V

B_W base di W



cambiamento di base
 da B_V a B'_V

$$X = M X'$$

X'
 componenti di X rispetto a B'_V

cambiamento di base
 da B_W a B'_W

$$Y' = T Y$$

Y'
 componenti di $f(v)$ rispetto a B'_W

$$A_f(MX') = y$$

$$y' = Ty \Rightarrow (TA_f M)X' = y'$$

"

A'_f matrice di f
rispetto B'_v e B'_w .

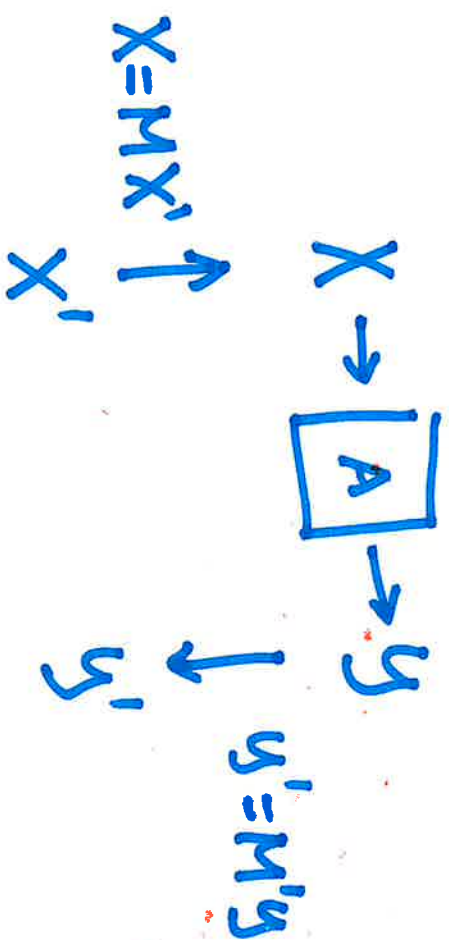
$f: V \rightarrow V$ lineare. $\Rightarrow f$ endomorfino.

Siano $B = (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$ una base di V

$A =$ matrice di f
rispetto a B

$B' = (\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n)$ una base di V

$A' =$ matrice di f
rispetto a B' .



$$\begin{aligned}
 Ax' &= M'AMX' = (M'AM)x' \\
 \Rightarrow A &= M'AM
 \end{aligned}$$

$$M'MX' = M'X = X' \quad \text{per ogni vettore } X' \in \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow M'M = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{In particolare } M \text{ è invertibile e } M' = M^{-1}.$$

$$\boxed{A' = M^{-1} A M}$$

con M matrice di
camb. di base da B' a B .

Def: Due matrici quadrate A, B in $\mathbb{K}^{n,n}$ sono dette

simili se $\exists$ una matrice quadrata invertibile

$$M \text{ tale che } A = M^{-1} B M$$

$$\text{ovvero } M A = B M.$$

oss: essere simili è una relazione di equivalenza fra matrici
in $\mathbb{K}^{n,n}$.

$$A \sim A \text{ perché } A = I^{-1} A I$$

$$A \sim B \Rightarrow A = M^{-1} B M \Rightarrow M A M^{-1} = B \text{ e posto } N = M^{-1}$$

$$N^{-1} A N = B \Rightarrow B \sim A$$

$$A \sim B \text{ e } B \sim C \Rightarrow \exists M, N \text{ invertibili tali che}$$

$$A = M^{-1} B M \quad B = N^{-1} C N$$

$$\Rightarrow A = M^{-1} N^{-1} C N M = (NM)^{-1} C (NM) = D^{-1} C D \Rightarrow A \sim C.$$

Def: Una matrice M è detta invertibile se $\exists N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale
 $\in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\text{da } MN = I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Lineare delle matrici invertibili di ordine n è un

gruppo Non commutativo $GL(n, \mathbb{R})$.

GL = generale lineare.

Oss: Le matrici di cambiamento di base sono invertibili.

oss: una matrice è invertibile $\Leftrightarrow \text{Ker } M = \{0\}$.

$$M \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

$$\text{Ker } M := \{x : Mx = 0\}.$$

(una matrice invertibile deve moltiplicare vettori liberi in vettori liberi).

$$f(v) = Mx$$

per avere f^{-1} serve f isomorfilmo
e dunque $\text{Ker } f = \{0\}$.

oss M è invertibile $\Leftrightarrow$ le sue colonne sono
lin. indipendenti in $\mathbb{K}^n \Leftrightarrow$ le sue colonne
sono una base di $\mathbb{K}^n$.

Vogliamo una funzione che ci dica "facilmente" se
una matrice è invertibile o no

avere n vettori di K^n sono linearmente
dipendenti ha 0 no.

$$d: K^n \rightarrow K.$$

- 1) d calcolata sulla base canonica fa 0 e
 d calcolata su seq. logite fa 0 .
 d su seq. libere fa $\neq 0$.

~~Per la dimostrazione del teorema di valutazione~~

- 2) Se c'è una colonna $d = 0 \Rightarrow d(M) = 0$
3) Se ad un vettore alla nostra colonna sommi una
una comb. lineare dei rimanenti vogliamo che d non
cambi.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ c_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\text{logite} \Rightarrow C_1 = a_1 C_2 + \dots + a_n C_n$$

$$2+3 \Rightarrow d(M) = 0 \text{ se le colonne}$$

sono logite!

4) Sei $M = (c_1 \dots c_i \dots c_n)$ und Matrix in $\mathbb{K}^{n,n}$
 $D \in \mathbb{K}^{n,n}$

$$d(c_1 \dots c_i + D \dots c_n) =$$

$$d(c_1 \dots c_i \dots c_n) + d(c_1 \dots D \dots c_n)$$

$$d(c_1 \dots 2c_i \dots c_n) = 2 d(c_1 \dots c_i \dots c_n)$$

✓ $1 \leq i \leq n$.

CONSEQUENZ

$$d(c_1 c_2 \dots c_n) =$$

$$= d(c_1 + c_2 c_2 \dots c_n) =$$

$$\Rightarrow \text{denn } d(c_1 + c_2 - c_1 c_3 \dots c_n) =$$

$$= d(c_2 - c_1 \ c_3 \dots \ c_n) =$$

$$-d(c_1 \ c_2 \ c_3 \dots \ c_n).$$

Se la ~~ultima~~ colonna non è 0. $\Rightarrow d(M) = 0$.

Altrimenti facciamo vedere che c'è un λ_0 che consente di calcolare $d(M) \Rightarrow d(M)$ è universalmente definita $\Rightarrow d(M) = \det(M)$.

$$d \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum d(I) \quad \sum e \in I_K$$

Osservo che $\exists a_{ii} \neq 0$ altrimenti la prima riga è nulla.

$\Rightarrow d(M) = 0$ perché la matrice ha i.m. cancellata in
un sottospazio di dim $n-1$
 $d_{11} \neq 0 \Rightarrow d(M) = d(M)$

$d(M) = -d(M')$ con colonne i-esime scambiate
con la prima

$$d \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = d_{11} \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= d \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_{12} d \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{21} \\ & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \alpha_{11} \alpha_{22} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \\
 &= \alpha_{12} \dots \alpha_{nn} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

